YÜZEYLER TEORİSİ FİNAL SINAVI (10.01.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) a) E^n deki bir M hiper yüzeyinin Ortalama eğrilik fonksiyonunu ve Ortalama eğriliğini tanımlayınız**(5 P.)**.

b) E^n de bir hiperyüzey M ve P noktasındaki ortalama eğriliği $H(P)$ olsun. $H(P)$ nin $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsız olduğunu gösteriniz**(15 P.)**.

2.) E^3 de M, denklemi $x_1^2 + x_2^2 = 1$ olan silindir ve M üzerindeki α eğrisi de $a,b,c \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\alpha : I \to M,\ \alpha(t) = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ ct+b)$$

ile verilmiş olsun. α eğrisinin silindir üzerinde bir geodezik olup olmadığını araştırınız **(20P.)**.

3.) $Z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2) - 2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki, bu nokta $(0, 1, 0)$ noktasına en yakın nokta olsun(Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanılacak) **(20P.)**.

4.) $M_1 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 x_3 - 1 = 0 \} \subset E^3$, $M_2 = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - x_2 x_3 = 0 \} \subset E^3$ yüzeylerinin $Q = (1, ?, ?)$ noktasında hangi açı altında kesiştiklerini bulunuz**(20P.)**.

5.) E^3 te bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla; I, II, III ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere $III - H.II + K.I \equiv 0$ olduğunu gösteriniz**(20P.)**.

NOT: Sorular eşit puanlı olup, süre 90 dakikadır. Prof. Dr. Ayhan TUTAR

CEVAPLAR

10.01.2019

C-1) a) M, E^n de bir hiperyüzey; S, M nin şekil operatörü olsun.

$$
\begin{aligned}
H : \; M &\longrightarrow \mathbb{R} \\
P &\longrightarrow H(P) = iz(S(P))
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlı H fonksiyonuna M nin ortalama eğrilik fonksiyonu, $H(P)$ değerine de M nin P noktasındaki ortalama eğriliği denir.

b) $T_M(P)$ de birbirinden farklı iki baz Φ ve ψ olsun.

$$S : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

lineer dönüşümünün bu iki baza göre matrisleri, sırası ile, S_Φ ve S_ψ olsun. Bu taktirde,

$S_\psi = Q \cdot S_\Phi \cdot Q^{-1}$ olacak şekilde en az bir Q regüler matrisi vardır.

$$iz(S_\psi) = iz(Q \cdot S_\Phi \cdot Q^{-1}) = iz(Q\,\overbrace{(S_\Phi Q^{-1})}^{K})$$

yazılabilir. $iz(AB) = iz(BA)$ olduğundan

$$iz(S_\psi) = iz((S_\Phi Q^{-1})\,Q) = iz(S_\Phi (Q^{-1} \cdot Q))$$

$\Rightarrow$ $iz(S_\psi) = iz(S_\Phi)$ elde edilir.

O halde, H nın $P \in M$ deki değeri $T_M(P)$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

C-2) 10.01.2019

$$\alpha'(t) = (-a\sin(at+b),\ a\cos(at+b),\ c)$$
$$\alpha''(t) = (-a^2\cos(at+b),\ -a^2\sin(at+b),\ 0)$$
$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0 \Rightarrow \vec{\nabla} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)$$
$$\Rightarrow \vec{\nabla} f = (2x_1, 2x_2, 0)$$
$$\Rightarrow N = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = \frac{\cancel{2}(x_1,x_2,0)}{\cancel{2}\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$
$$\Rightarrow N = (x_1, x_2, 0).$$
$$\Rightarrow N\big|_{\alpha(t)} = (\cos(at+b),\ \sin(at+b),\ 0).$$

Buna göre; $\alpha''(t) = -a^2 N\big|_{\alpha(t)}$ olduğundan $\alpha''(t) \perp T_M(\alpha(t))$.
O halde α eğrisi silindir üzerinde geodezik bir eğridir.

C-4) $f: M_1 : \longrightarrow \mathbb{R}$
$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \cdot x_3 - 1$$
ve
$$g: M_2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow g(x_1,x_2,x_3) = x_1 - x_2 \cdot x_3$$

$x_1 = 1$ için $x_1 \cdot x_3 - 1 = 0$ dan $x_3 = 1$ ve $x_1 - x_2 \cdot x_3 = 0$ dan $x_2 = 1$ bulunur. O halde $P = (1,1,1)$ dir.

$$\nabla f = (x_3, 0, x_1) \Rightarrow \nabla f\big|_P = (1,0,1)$$
$$\nabla g = (1, -x_3, -x_2) \Rightarrow \nabla g\big|_P = (1,-1,-1)$$

olur. Buradan,

$\|\nabla f|_P\| = \sqrt{2}$ ve $\|\nabla g|_P\| = \sqrt{3}$ elde edilir.

M_1 ve M_2 yüzeylerinin P noktasındaki normalleri arasındaki açı θ ise

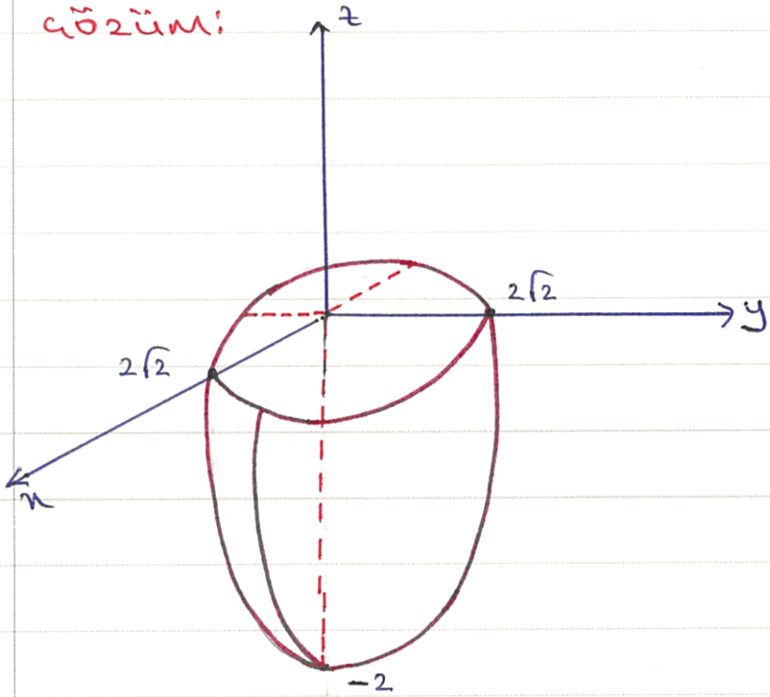
$$\cos\theta = \frac{\langle \nabla f|_P, \nabla g|_P \rangle}{\|\nabla f|_P\| \cdot \|\nabla g|_P\|} = \frac{\langle (1,0,1), (1,-1,-1)\rangle}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

bulunur. O halde M_1 ve M_2 yüzeyleri P noktasında birbirlerine diktir.

Soru 3: $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2$ paraboloidi üzerinde öyle bir nokta bulunuz ki bu nokta $(0,1,0)$ noktasına en yakın nokta olsun (Lagrange Çarpan Teoreminden faydalanınız).

Çözüm:



$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)-2 \Rightarrow z=\frac{x^2+y^2-8}{4}$

$\Rightarrow x^2+y^2-4z-8=0$ bulunur.

Buradan,

$g(x,y,z)=x^2+y^2-4z-8=0$

ve (x,y,z) ile $(0,1,0)$ noktaları arasındaki uzaklık ifadesinden

$f(x,y,z)=x^2+(y-1)^2+z^2$

yazabiliriz.

$\nabla g=(2x,2y,-4)$,

$\nabla f=(2x,2(y-1),2z)$

olduğundan Lagrange çarpan teoreminden

$\nabla f=\lambda\nabla g$

veya buradan

$(x,y-1,z)=\lambda(x,y,-2)$

olup, söz konusu noktada

$$\begin{cases} x=\lambda x \\ y-1=\lambda y \\ z=-2\lambda \\ x^2+y^2-4z=8 \end{cases}$$

sağlanmalıdır. Eğer $x\neq 0$ ise $\lambda=1$ olur. Bu ise $y-1=\lambda y$ den $-1=0$ çelişkisini elde ederiz. O halde $x=0$ olmalıdır. $x=0$, $y=\frac{1}{1-\lambda}$, $z=-2\lambda$ değerini son denklemde yerine yazarsak

$$0+\frac{1}{(1-\lambda)^2}-4(-2\lambda)=8 \Rightarrow \frac{1+8\lambda(1-\lambda)^2}{(1-\lambda)^2}=8$$

$$\Longrightarrow 8\lambda^3-24\lambda^2+24\lambda-7=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} 1/2 & 8 & -24 & 24 & -7 \\ & & 4 & -10 & 7 \\ \hline & 8 & -20 & 14 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(8\lambda^2 - 20\lambda + 14) = 0$

$\Rightarrow (\lambda - \frac{1}{2})(4\lambda^2 - 10\lambda + 7) = 0$

$4\lambda^2 - 10\lambda + 7 = 0$ denkleminin köklerini araştıralım:

$\Delta = b^2 - 4ac$ den $\Delta = 100 - 4.4.7 = -12 < 0$ olduğundan kökler sanaldır. Buna göre,

$8\lambda^3 - 24\lambda^2 + 24\lambda - 7 = 0$ denkleminin yalnız bir reel kökü vardır ve o da $\lambda = \frac{1}{2}$ dir.

Buna göre, f için M üzerinde $z = -1$, $x = 0$ ve $x^2 + y^2 - 4z = 8$ den $0 + y^2 - 4.(-1) = 8 \Rightarrow y^2 = 4 \Rightarrow y = \mp 2$.

$A_1 = (0, -2, -1)$, $A_2 = (0, 2, -1)$ noktaları kritik noktalardır.

$f(A_1) = 10$, $f(A_2) = 2$ olduğundan; $A_2 = (0, 2, -1) \in M$ noktası $(0, 1, 0)$ noktasına M üzerinde en yakın noktadır.

$\lambda = \frac{1}{2}$ için $z = -2\lambda$ dan $z = -2.\frac{1}{2} = -1$.

Soru 5: E^3 ün bir hiperyüzeyi M olsun. M üzerinde temel formlar, sırasıyla; $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ ve Gauss eğrilik fonksiyonu K, ortalama eğrilik fonksiyonu H olmak üzere,

$$\mathrm{III} - H.\mathrm{II} + K.\mathrm{I} = 0$$

olduğunu gösteriniz.

ÇÖZÜM: $n=3$ olduğundan $\text{Boy}\, M = \text{Boy}\, T_M(P) = \text{Boy}\, \chi(M) = 2$ dir. O halde,

$$S : T_M(P) \longrightarrow T_M(P)$$

şekil operatörünün karakteristik polinomu ikinci derecedendir. Eğer k_1 ve k_2 asli eğrilikler ve X_1 ve X_2 de bu asli eğriliklere karşılık gelen asli doğrultular ise $S(X_1) = k_1 X_1$, $S(X_2) = k_2 X_2$ yazılabileceğinden

$$S\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

dır. O halde, $\Phi = \{X_1, X_2\}$ bazına göre S şekil operatörüne karşılık gelen matrisi

$$S_\Phi = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix}$$

şeklinde alabiliriz. S nin karakteristik polinomu

$$P_{S_\Phi}(\lambda) = |\lambda I_2 - S_\Phi| = \lambda^2 - \lambda(k_1+k_2) + k_1.k_2$$

bulunur. Cayley-Hamilton Teoreminden (her kare matris kendi karakteristik polinomunun bir köküdür) $P_S(S) = 0$ dır. Böylece,

$$S^2 - (k_1+k_2)S + (k_1.k_2) I_2 = 0$$

yazılabilir. Diğer taraftan, $\forall X_P \in T_M(P)$ için

$$[S^2 - (k_1+k_2)S + (k_1.k_2) I_2](X_P) = 0(X_P) = 0$$ ve $\forall Y_P \in T_M(P)$

için, eşitliği iç-çarpıma tabi tutarsak

$$\langle S^2(X_P), Y_P\rangle - (k_1+k_2)\langle S(X_P), Y_P\rangle + (k_1.k_2)\langle \underbrace{I(X_P)}_{S^0(X_P)}, X_P\rangle = 0$$

yazılabilir. Bu ise

$$\mathrm{III}(X_P, Y_P) - \underbrace{(k_1+k_2)}_{H}\mathrm{II}(X_P, Y_P) + \underbrace{k_1.k_2}_{K}\mathrm{I}(X_P, Y_P) = 0(X_P, Y_P)$$

$$\Rightarrow \mathrm{III} - H.\mathrm{II} + K.\mathrm{I} = 0$$ elde edilir.